超越顛峰

# 數學甲 歷屆指定科目考試試題の精粹

# 目次

# 105 學年度指定科目考試數學甲試題分析

東山高中 數學科教師／李善文

## 壹、試題分析

### 一、各題出處、中心概念、難易度

| 題　號 | 出題範圍 | 中心概念 | 難易度 |
|---|---|---|---|
| 單選 *1.* | 第一冊單元三 指數、對數函數 | 解對數方程式、實係數二次方程式有兩相異實根的判斷 | 中 |
| 單選 *2.* | 選修上冊單元二 三角函數 | 廣義角弧度量之餘弦函數值與其他五個三角函數值的接近程度之比較 | 中 |
| 單選 *3.* | 第三冊單元三 平面向量 | 向量內積的定義及運算性質的應用 | 中 |
| 單選 *4.* | 選修下冊單元二 多項式函數的微積分 | 導數的幾何意義 | 中 |
| 多選 *5.* | 第四冊單元二 空間中的平面與直線 | 空間中平面外一點在平面上的正射影（垂足）、平面的法向量、點法式、點到平面的距離、判斷直線與平面相交 | 中 |
| 多選 *6.* | 第四冊單元三 矩陣 | 二階方陣在坐標平面上定義的線性變換、矩陣的行列式值、反方陣與乘法運算的應用 | 中偏難 |
| 多選 *7.* | 選修下冊單元一 極限與函數 | 有限級數（等比級數）的和、數列的極限 | 中偏難 |
| 選填 *A* | 第二冊單元三 機率 | 條件機率的計算 | 中偏易 |
| 選填 *B* | 第四冊單元一 空間向量 | 空間中兩向量的外積、向量的平行、三階行列式值的計算或其幾何意義的了解與應用 | 中 |
| 選填 *C* | 選修上冊單元二 三角函數 | 複數之共軛複數、複數的絕對值或其幾何意義的了解與應用 | 中 |
| 選填 *D* | 選修上冊單元一 機率與統計 II | 隨機變數的期望值之定義與計算 | 中偏難 |
| 非選一 | 第三冊單元二 直線與圓<br>第三冊單元三 平面向量 | 圓外的點至此圓的兩切線段等長、向量分點公式、任一向量可表成不平行的兩非零向量之線性組合且表示法為唯一 | 中偏易 |
| 非選二 | 選修下冊單元二 多項式函數的微積分 | 三次函數圖形的了解與判斷、重根的判斷、微積分基本定理、費瑪定理、函數在閉區間的最小值之求法 | 中偏難 |



### 二、各冊占分

| 冊　別 | 第一冊 | 第二冊 | 第三冊 | 第四冊 | 選修上冊 | 選修下冊 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 配　分 | 6 分 | 11 分 | 15 分 | 23 分 | 20 分 | 25 分 |

今年指定科目考試數學甲之試題測驗內容皆在大考中心公布的重點範圍內，但偏重在第四冊學測不考的內容及選修上、下冊之主要概念及應用。試題總題數為 13 題，不可能涵蓋所有章節，所以仍比照去年，多半採跨單元或結合不同概念來命題。

**三、題型分配**

指定科目考試數學甲題型有兩部分，每年各類型題數略微不同，第壹部分選擇題，單選、多選及選填之題數互有多寡或相等，但總共題數不超過 11 題；第貳部分非選擇題，固定有兩大題，有時也可能分若干小題。今年第壹部分選擇題有單選 4 題（每題 6 分）、多選 3 題（每題 8 分）及選填 4 題（每題 7 分）三種，總題數為 11 題，共 76 分；第貳部分非選擇題有兩大題，第一題有 2 小題，第二題有 3 小題，共 24 分。

**四、難易度分析**

| 難易度 | 題　號 | 題　數 | 占　分 | 比　例 |
|---|---|---|---|---|
| 中偏易 | 選填 $A$、非選一、非選二(1) | $2\frac{1}{3}$ | 20 | 20% |
| 中 | 單選 1.、2.、3.、4.、多選 5.、選填 $B$、$C$ | 7 | 46 | 46% |
| 中偏難 | 多選 6.、7.、選填 $D$、非選二(2)(3) | $3\frac{2}{3}$ | 34 | 34% |

就今年指考數甲試題而言，筆者認為沒有「易」的題目，但也沒有「難」的題目，小部分為中偏易，而大部分為中及中偏難的題目，整體而論比去年簡單一些。所考各單元之概念不算難，但必須能綜合各概念並連結才有可能答對，對中下程度的學生而言有一定難度，對中等程度但只靠記憶、觀念不夠清晰的同學而言會有挫折感，想得高分仍須具有相當的程度、清晰的觀念及綜合分析推理的能力。

## 貳、特殊試題分析

【單選 4.】《方法一》

因為二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切，可令切點為 $(c,ac+b)$

由 $\frac{d}{dx}(ax^2+bx)=2ax+b$，得切線斜率為 $2ac+b=a$，故 $b=a-2ac$

又 $ac+b=ac^2+bc$，所以 $ac+a-2ac=ac^2+(a-2ac)c$，即 $ac^2-2ac+a=0$

因 $a\neq 0$，得 $c^2-2c+1=0$，即 $(c-1)^2=0$，得 $c=1$

於是得 $b=-a$，即 $a+b=0$，所以切點為 $(1,0)$

《方法二》

因為明顯看出 $(1,a+b)$ 為 $y=ax^2+bx$ 與 $y=ax+b$ 兩圖形的交點，又二次函數圖形（拋物線）與一次函數圖形（直線）最多有兩交點，所以當二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切時，此兩圖形必切於點 $(1,a+b)$，所以 $ax^2+bx=ax+b$ 有相等兩實根 $1,1$，即 1 是 $ax^2+(b-a)x-b=0$ 的重根，由根與係數關係知 $\frac{-b}{a}=1$，得 $a+b=0$，所以切點為 $(1,0)$

故選(A)

【說明】了解二次函數圖形（拋物線）與一次函數圖形的相交情形及切線的幾何意義，若能看出點 $(1,a+b)$ 為 $y=ax^2+bx$ 與 $y=ax+b$ 的圖形之交點，不用導數的概念也可知切點就是點 $(1,a+b)$，再由根與係數關係可得知 $a+b=0$，所以切點為 $(1,0)$。

【選填 $D$】三次停留區域的標號數、三次停留區域標號數字的和及其對應機率如下頁表：

| 第一次 | 第二次 | 第三次 | 標號數字和 | 機　率 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$ |
| 0 | 1 | 1 | 2 | $\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$ |
| 1 | 0 | 1 | 2 | $\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$ |
| 1 | 1 | 0 | 2 | $\frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$ |
| 1 | 1 | 1 | 3 | $(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$ |

令隨機變數 $X$ 表此遊戲指針三次所停留區域的標號數字之和，其機率函數列表如下：

| 標號數字和 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 機　率 | $\frac{3}{64}$ | $\frac{39}{64}$ | $\frac{21}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

所求隨機變數 $X$ 的期望值 $E(X)=0\cdot\frac{3}{64}+1\cdot\frac{39}{64}+2\cdot\frac{21}{64}+3\cdot\frac{1}{64}=\frac{84}{64}=\frac{21}{16}$

【說明】針對此題，沒有公式可套用，同學必須閱讀能力強，確實了解題意並知道由隨機試驗得出所關心的隨機變數之可能值有哪些，列出其機率函數，才能依期望值的定義得出所要求之期望值，非常有鑑別度。

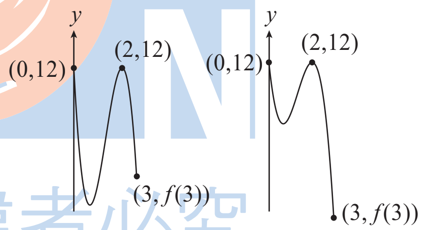
【非選二】⑴因為三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 $a$，且 $0\le x\le 3$

$f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0$、$x=2$ 兩處，可知

$f'(2)=0$，且 $f(0)=f(2)=12$

圖形在 $(2,12)$ 處，以其為切點的切線是水平線，

所以 $y=f(x)$ 在 $0\le x\le 3$ 的範圍中可能的圖形如右：




所以 $a<0$

⑵令 $h(x)=f(x)-12$，則 $h(0)=h(2)=0$，且 $h'(2)=f'(2)=0$

所以 $h(x)=f(x)-12=0$ 的實根為 0 及 2，且 2 為二重根

所以 $h(x)=ax(x-2)^2$，$f(x)=ax(x-2)^2+12$

因多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，且在 $x=1$ 處有相對極值

又對於任意實數 $s,r$（$s\le r$），$\int_s^r f(t)dt=G(r)-G(s)$ 恆成立

所以對於任意實數 $x$，$\int_0^x f(t)dt=G(x)-G(0)=G(x)$ 恆成立

由微積分基本定理知 $G'(x)=\dfrac{d\int_0^x f(t)dt}{dx}=f(x)$

由費瑪定理知 $f(1)=G'(1)=0$，所以 $f(1)=a+12=0$，得 $a=-12$

⑶ $G'(x)=f(x)=-12x(x-2)^2+12=-12(x^3-4x^2+4x-1)$

$$=-12(x-1)(x^2-3x+1)=-12(x-1)(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

列表顯示 $G'(x)$ 值的正、負及 $G(x)$ 的遞增、遞減如下：

| $x$ | 0 | | $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G'(x)$ | 12 | + | 0 | − | 0 | + | 12 |
| $G(x)$ | 0 | ↗ | $G(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ | ↘ | $G(1)$ | ↗ | $G(2)$ |

又 $G(1)=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1[-12(t^3-4t^2+4t-1)]\,dt=(-3t^4+16t^3-24t^2+12t)\Big|_0^1=1$

所以在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 的最小值為 $G(0)=0$

【說明】此題為多項式函數的微積分之綜合題，把三次函數的可能圖形、微分與積分的重要觀念及定理的應用結合一起來綜合評量學生的認知與表達能力，一般要清楚說明理由有一些難度，若閱卷老師嚴格的話不容易得滿分，是非常好的評量試題。

## 參、其他分析、應考對策或結論

今年主要的命題範圍所占分數及難易度比較均衡，主要的命題範圍以第四冊、選修數甲上、下冊為主，著重觀念的整合，沒有繁雜的計算。比較 103、104、105 這三年的題目的配分如下表：

<table>
<tr><th>冊　別</th><th>單元名稱</th><th colspan="2">105 年指考配分</th><th colspan="2">104 年指考配分</th><th colspan="2">103 年指考配分</th></tr>
<tr><td rowspan="3">第一冊</td><td>數與式</td><td>0</td><td rowspan="3">6</td><td>0</td><td rowspan="3">16</td><td>0</td><td rowspan="3">18</td></tr>
<tr><td>多項式</td><td>0</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>指數與對數</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="4">第二冊</td><td>數列與級數</td><td>4</td><td rowspan="4">11</td><td>2</td><td rowspan="4">10</td><td>2</td><td rowspan="4">8</td></tr>
<tr><td>排列、組合</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>機率</td><td>7</td><td>8</td><td>6</td></tr>
<tr><td>數據分析</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第三冊</td><td>三角</td><td>0</td><td rowspan="3">15</td><td>4</td><td rowspan="3">20</td><td>12</td><td rowspan="3">18</td></tr>
<tr><td>直線與圓</td><td>4</td><td>8</td><td>6</td></tr>
<tr><td>平面向量</td><td>11</td><td>8</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">第四冊</td><td>空間向量</td><td>7</td><td rowspan="4">23</td><td>2</td><td rowspan="4">12</td><td>20</td><td rowspan="4">32</td></tr>
<tr><td>空間中的直線與平面</td><td>8</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>矩陣</td><td>8</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td>二次曲線</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">選修（上）</td><td>機率與統計 II</td><td>7</td><td rowspan="2">20</td><td>4</td><td rowspan="2">17</td><td>2</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>三角函數</td><td>13</td><td>13</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">選修（下）</td><td>極限與函數</td><td>4</td><td rowspan="2">25</td><td>13</td><td rowspan="2">25</td><td>2</td><td rowspan="2">20</td></tr>
<tr><td>多項式函數的微積分</td><td>21</td><td>12</td><td>18</td></tr>
</table>



## 肆、結語

感謝大考中心近年來非常用心、謹慎地選題，期望藉由考試的命題方向與方式來導正老師們的數學教學方法與加強觀念的澄清，進而影響學生的學習方式與態度，相信對數學教育會大有助益。同學們要知道數學的學習一定要誠實面對自己的問題，澈底明白道理並尋求解決之道，對自己有信心，持續努力，就會抓到訣竅，而喜歡數學思考，對一般事物的分析也更清楚。

# 105學年度指定科目考試

第一次練習____月____日完成 分數____

第二次複習____月____日完成 分數____

頂標 100～75 分 讚啦，你把整個場面都 hold 住了。
前標 74～65 分 還差一點，你的人生就完整了。
均標 64～47 分 注意！後面還有人等著超越你呢！
後標 46～27 分 別再打混摸魚囉！
底標 26～15 分 你要如何面對江東父老呀？

## 第壹部分：選擇題（占 76 分）

### 一、單選題（占 24 分）

說明：第 1. 題至第 4. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

______ 1. 請問下列選項中哪一個數值 $a$ 會使得 $x$ 的方程式 $\log a-\log x=\log(a-x)$ 有兩相異實數解？

(A) $a=1$　(B) $a=2$　(C) $a=3$　(D) $a=4$　(E) $a=5$

______ 2. 下列哪一個選項的數值最接近 $\cos(2.6\pi)$？

(A) $\sin(2.6\pi)$　(B) $\tan(2.6\pi)$　(C) $\cot(2.6\pi)$　(D) $\sec(2.6\pi)$　(E) $\csc(2.6\pi)$

______ 3. 假設三角形 $ABC$ 的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=6$。請選出和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的內積為最大的選項。

(A) $\overrightarrow{AC}$　(B) $\overrightarrow{CA}$　(C) $\overrightarrow{BC}$　(D) $\overrightarrow{CB}$　(E) $\overrightarrow{AB}$



______ 4. 假設 $a$、$b$ 皆為非零實數，且坐標平面上二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

(A)在 $x$ 軸上

(B)在 $y$ 軸上

(C)在第一象限

(D)在第四象限

(E)當 $a>0$ 時，在第一象限；當 $a<0$ 時，在第四象限

## 二、多選題（占 24 分）

說明：第 5. 題至第 7. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 在坐標空間中，點 $P(2,2,1)$ 是平面 $E$ 上距離原點 $O(0,0,0)$ 最近的點。請選出正確的選項。

(A)向量 $\vec{v}=(1,-1,0)$ 為平面 $E$ 的法向量

(B)點 $P$ 也是平面 $E$ 上距離點 $(4,4,2)$ 最近的點

(C)點 $(0,0,9)$ 在平面 $E$ 上

(D)點 $(2,2,-8)$ 到平面 $E$ 的距離為 9

(E)通過原點和點 $(2,2,-8)$ 的直線與平面 $E$ 會相交

6. 坐標平面上一矩形，其頂點分別為 $A(3,-2)$、$B(3,2)$、$C(-3,2)$、$D(-3,-2)$。設二階方陣 $M$ 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 $A$ 映射到 $B$ 且將 $B$ 映射到 $C$。請選出正確的選項。

(A) $M$ 定義的線性變換是鏡射變換

(B) $M\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $M$ 定義的線性變換將 $C$ 映射到 $D$ 且將 $D$ 映射到 $A$

(D) $M$ 的行列式值為 $-1$

(E) $M^3=-M$



7. 在實數線上，動點 $A$ 從原點開始往正向移動，動點 $B$ 從 8 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 $A$、$B$ 移動的距離分別為 1、4，且 $A$、$B$ 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。令 $c_n$ 為第 $n$ 秒時 $A$、$B$ 的中點位置。請選出正確選項。

(A) $c_1=\frac{5}{2}$

(B) $c_2>c_1$

(C)數列 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 是一個等比數列

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$

(E) $c_{1000}>2$

## 三、選填題（占 28 分）

說明：1. 第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（⑧～㉑）。
2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

*A.* 投擲一枚均勻銅板 8 次。在最初兩次的投擲中曾經出現過正面的條件下，8 次投擲中恰好出現 3 次正面的條件機率為 $\dfrac{⑧}{⑨⑩}$。（化成最簡分數）

*B.* 設 $\vec{u}=(1,2,3)$、$\vec{v}=(1,0,-1)$、$\vec{w}=(x,y,z)$ 為空間中三個向量，且向量 $\vec{w}$ 與向量 $\vec{u}\times\vec{v}$ 平行。若行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ x & y & z\end{vmatrix}=-12$，則 $\vec{w}=$（ ⑪ ， ⑫⑬ ， ⑭ ）。

*C.* 在所有滿足 $z-\bar{z}=-3i$ 的複數 $z$ 中（其中 $\bar{z}$ 為 $z$ 的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$），$|\sqrt{7}+8i-z|$ 的最小值為 $\dfrac{⑮⑯}{⑰}$。（化成最簡分數）

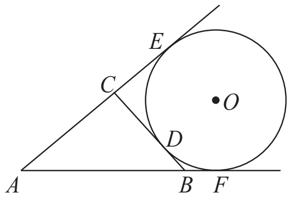


*D.* 一圓盤分成標有數字 0、1 的兩區域，且圓盤上有一可轉動的指針。已知每次轉動指針後，前後兩次指針停在同一區域的機率為 $\dfrac{1}{4}$，而停在不同區域的機率為 $\dfrac{3}{4}$。遊戲規則為連續轉動指針三次，計算指針在這三次所停區域的標號數字之和。若遊戲前指針的位置停在標號數字為 1 的區域，則此遊戲的期望值為 $\dfrac{⑱⑲}{⑳㉑}$。（化成最簡分數）

## 第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（1.、2.、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、如圖，已知圓 $O$ 與直線 $BC$、直線 $AC$、直線 $AB$ 均相切，且分別相切於 $D$、$E$、$F$。又 $\overline{BC}=4$、$\overline{AC}=5$、$\overline{AB}=6$。




1. 假設 $\overline{BF}=x$，試利用 $x$ 分別表示 $\overline{BD}$，$\overline{CD}$ 以及 $\overline{AE}$，並求出 $x$ 之值。（4 分）
2. 若將 $\overrightarrow{AD}$ 表示成 $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha$、$\beta$ 之值為何？（5 分）

二、設三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 $a$。已知在 $0\le x\le 3$ 的範圍中，$f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0$、$x=2$ 兩處。另一多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，以及對任意實數 $s,r$（$s\le r$），$\int_s^r f(t)\,dt=G(r)-G(s)$ 恆成立，且函數 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有（相對）極值。

1. 試描繪 $y=f(x)$ 在 $0\le x\le 3$ 的範圍中可能的圖形，在圖上標示 $(0,f(0))$、$(2,f(2))$，並由此說明 $a$ 為正或負。（4 分）
2. 試求方程式 $f(x)-12=0$ 的實數解（如有重根須標示），並利用 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值，求 $a$ 之值。（5 分）
3. 在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，求 $G(x)$ 之最小值。（6 分）

# 105 學年度指定科目考試

1.(E) 2.(C) 3.(D) 4.(A) 5.(B)(C) 6.(B)(C)(E) 7.(A)(D)
A. ⑧ 3 ⑨ 1 ⑩ 6 B. ⑪ 1 ⑫ − ⑬ 2 ⑭ 1
C. ⑮ 1 ⑯ 9 ⑰ 2 D. ⑱ 2 ⑲ 1 ⑳ 1 ㉑ 6

## 第壹部分：選擇題

### 一、單選題

1.因為 $\log a-\log x=\log(a-x)$ 有兩相異實數解

$\Leftrightarrow$ $\log a=\log x+\log(a-x)$ 有兩相異實數解

$\Leftrightarrow$ $\log a=\log x(a-x)$ 有兩相異正實數解

$\Leftrightarrow$ $a=x(a-x)$ 有兩相異正實數解，$a>0$

$\Leftrightarrow$ $x^2-ax+a=0$ 有兩相異正實數解，$a>0$

$\Leftrightarrow$ $a^2-4a>0$，$a>0$

$\Leftrightarrow$ $a>4$，$a>0$

故選(E)

2.因為 $2.6\pi=2\pi+\frac{3}{5}\pi$，所以標準位置角 $2.6\pi$ 之最小正同界角為 $\frac{3}{5}\pi$，且 $\frac{\pi}{2}<\frac{3}{5}\pi<\frac{3}{4}\pi$

《方法一》

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos 2.6\pi=\cos\frac{3}{5}\pi<0$，$-1<\cot 2.6\pi=\cot\frac{3}{5}\pi<0$

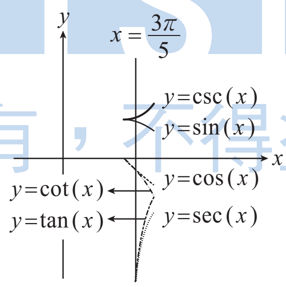
又 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 2.6\pi<1<\csc 2.6\pi$

$\sec 2.6\pi=\frac{1}{\cos 2.6\pi}<\frac{\sin 2.6\pi}{\cos 2.6\pi}=\tan 2.6\pi<-1$

所以選項中的值以 $\cot(2.6\pi)$ 最接近 $\cos(2.6\pi)$

《方法二》

將六個三角函數 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 在 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{4}\pi$ 範圍的圖形畫在同一坐標平面上，再作鉛直線 $x=\frac{3}{5}\pi$，標出此鉛直線與六個圖形的交點，即可看出選項中的值以 $\cot(2.6\pi)$ 最接近 $\cos(2.6\pi)$




故選(C)

3.由餘弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{5^2+6^2-8^2}{2\times5\times6}=-\frac{1}{20}<0$

所以 $\angle BAC$ 為鈍角

《方法一》

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\angle BAC=5\times6\times(-\frac{1}{20})=-\frac{3}{2}$

(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}$

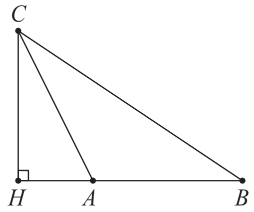
(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{3}{2}-5\times5\times\cos0^\circ=-\frac{53}{2}$

(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{53}{2}=26.5$

(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2=5^2=25$

《方法二》




令 $C$ 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $H$，如圖

因為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影）$\cdot\vec{b}$

，又 $\overline{AB}<\overline{BH}$

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

$=\overline{AB}\times\overline{AH}\times\cos180^\circ$

$=-\overline{AB}\times\overline{AH}<0$

(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}$

(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(180^\circ-\angle ABC)<0$

（或 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}=-\overline{BA}\times\overline{BH}\times\cos0^\circ<0$）

(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}=\overline{BA}\times\overline{BH}\times\cos0^\circ=\overline{BA}\times\overline{BH}$

(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\times\overline{AB}\times\cos0^\circ=\overline{AB}\times\overline{AB}$

而 $\overline{AB}\times\overline{AH}<\overline{BA}\times\overline{BH}$，且 $\overline{AB}\times\overline{AB}<\overline{BA}\times\overline{BH}$

故選(D)

4.《方法一》

因為二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切

可令切點為 $(c,ac+b)$，由 $\frac{d}{dx}(ax^2+bx)=2ax+b$

得切線斜率為 $2ac+b=a$，故 $b=a-2ac$

又 $ac+b=ac^2+bc$，所以 $ac+a-2ac=ac^2+(a-2ac)c$

即 $ac^2-2ac+a=0$

因 $a\neq0$，得 $c^2-2c+1=0$，即 $(c-1)^2=0$，得 $c=1$

於是得 $b=-a$，即 $a+b=0$，所以切點為 $(1,0)$

《方法二》

因為明顯看出 $(1,a+b)$ 為 $y=ax^2+bx$ 與 $y=ax+b$ 兩圖形的交點，又二次函數圖形（拋物線）與一次函數圖形（直線）最多有兩交點，所以當二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切時，此兩圖形必切於點 $(1,a+b)$，所以 $ax^2+bx=ax+b$ 有相等兩實根 1, 1

即 1 是 $ax^2+(b-a)x-b=0$ 的重根

由根與係數關係知 $\frac{-b}{a}=1$，得 $a+b=0$，所以切點為 $(1,0)$

故選(A)

【說明】

了解二次函數圖形（拋物線）與一次函數圖形的相交情形及切線的幾何意義，若能看出點 $(1,a+b)$ 為 $y=ax^2+bx$ 與 $y=ax+b$ 的圖形之交點，不用導數的概念也可知切點就是點 $(1,a+b)$，再由根與係數關係可得知 $a+b=0$，所以切點為 $(1,0)$。

### 二、多選題

5.(A)×；因為已知點 $P(2,2,1)$ 為平面 $E$ 上距離原點 $O(0,0,0)$ 最近的點，所以平面 $E$ 的法向量為 $k\overrightarrow{OP}=(2k,2k,k)$，其中 $k\in R$、$k\neq0$，所以 $\vec{v}=(1,-1,0)$ 不是平面 $E$ 的法向量

(B)○；因為點 $P(2,2,1)$ 恰為 $O(0,0,0)$ 與 $A(4,4,2)$ 所決定線段的中點，所以點 $P(2,2,1)$ 也是平面 $E$ 上距離點 $A(4,4,2)$ 最近的點

(C)○；$\overrightarrow{OP}=(2,2,1)$ 為平面 $E$ 的一法向量，由點法式知平面 $E$ 的方程式為 $2(x-2)+2(y-2)+(z-1)=0$，即 $2x+2y+z=9$，所以點 $(0,0,9)$ 在平面 $E$ 上

(D)×；點 $B(2,2,-8)$ 到平面 $E$ 的距離為

$$\frac{|4+4-8-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{9}{3}=3$$

(E)×；$\overrightarrow{OB}=(2,2,-8)$，$\overrightarrow{OP}=(2,2,1)$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=4+4-8=0$，所以 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OP}$

可知 $\overleftrightarrow{OB}$ 與平面 $E$ 平行，即通過原點與點 $(2,2,-8)$ 的直線與平面 $E$ 不相交

故選(B)(C)

6. 因為 $M$ 所定義的線性變換可將 $A$ 映射到 $B$ 且將 $B$ 映射到 $C$，

所以 $M\begin{bmatrix}3&3\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3\\2&2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\quad M=\begin{bmatrix}3&-3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3\\-2&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{12}&\frac{-3}{12}\\\frac{2}{12}&\frac{3}{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}$$

(A)×；$M$ 不是鏡射變換

(B)○

(C)○；$M\begin{bmatrix}-3&-3\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-3\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&3\\-2&-2\end{bmatrix}$，

所以 $M$ 可將 $C$ 映射到 $D$ 且將 $D$ 映射到 $A$

(D)×；$M$ 的行列式值為 $\begin{vmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{vmatrix}=0+1=1$

(E)○；$M^2=\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$

$\Rightarrow\quad M^3=(-I)M=-M$

故選(B)(C)(E)

7. 令動點 $A$、$B$ 第 $n$ 秒在數線上的坐標位置分別為 $a_n$、$b_n$，由題意知

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1\cdot[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$b_n=8-[4+4\cdot\frac{1}{3}+\cdots+4\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}]$$

$$=8-\frac{4\cdot[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=2+6\cdot(\frac{1}{3})^n$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)=\frac{1}{2}[2-(\frac{1}{2})^{n-1}+2+6\cdot(\frac{1}{3})^n]=2-(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^{n-1}$$

(A)○；$c_1=2-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$

(B)×；$c_2=2-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{25}{12}<\frac{5}{2}=c_1$

(C)×；$c_{n+1}-c_n=[2-(\frac{1}{2})^{n+1}+(\frac{1}{3})^n]-[2-(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^{n-1}]$

$=(\frac{1}{2})^{n+1}-2\cdot(\frac{1}{3})^n$

(D)○；$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}[2-(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^{n-1}]=2-0-0=2$

(E)×；$c_{1000}=2-(\frac{1}{2})^{1000}+(\frac{1}{3})^{999}$

$=2-\frac{1}{2^{1000}}\cdot[1-2\cdot(\frac{2}{3})^{999}]<2-\frac{1}{2^{1000}}\cdot[1-2\cdot(\frac{2}{3})^2]<2$

故選(A)(D)

## 三、選填題

A. 投擲一枚均勻銅板 8 次，令 $A$ 表最初兩次的投擲中曾經出現過正面的事件，$B$ 表 8 次投擲中恰好出現 3 次正面的事件，所求機率為

$$P(B|A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}=\frac{C_2^2\cdot C_1^6+C_1^2\cdot C_2^6}{C_2^2\cdot 2^6+C_1^2\cdot 2^6}=\frac{6+30}{64+128}=\frac{36}{192}=\frac{3}{16}$$

B. 因為 $\vec{u}=(1,2,3)$，$\vec{v}=(1,0,-1)$

$\Rightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=(\begin{vmatrix}2&3\\0&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix})=(-2,4,-2)$

又 $\vec{w}=(x,y,z)$ 與 $\vec{u}\times\vec{v}$ 平行

$\Rightarrow\quad \vec{w}=(x,y,z)=t(-2,4,-2)=(-2t,4t,-2t)$

又已知 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\x&y&z\end{vmatrix}=-12$，而 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\x&y&z\end{vmatrix}=(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

所以 $4t+16t+4t=-12$

得 $t=-\frac{1}{2}$，所以 $\vec{w}=(1,-2,1)$

C.《方法一》

令 $z=x+yi$，（其中 $x$、$y$ 均為實數），則 $\bar{z}=x-yi$

所以 $z-\bar{z}=-3i\quad\Leftrightarrow\quad 2yi=-3i\quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{3}{2}$

得 $|\sqrt{7}+8i-z|=|\sqrt{7}+8i-(x-\frac{3}{2}i)|=|(\sqrt{7}-x)+\frac{19}{2}i|$

$=\sqrt{(\sqrt{7}-x)^2+\frac{361}{4}}$

所以當 $x=\sqrt{7}$ 時，$|\sqrt{7}+8i-z|$ 有最小值 $\sqrt{\frac{361}{4}}=\frac{19}{2}$

《方法二》

$z-\bar{z}=-3i\quad\Leftrightarrow\quad 2Im(z)=-3\quad\Leftrightarrow\quad Im(z)=-\frac{3}{2}$

所以滿足 $z-\bar{z}=-3i$ 的複數 $z$ 在複數平面上之軌跡為水平線 $y=-\frac{3}{2}$

所以 $|\sqrt{7}+8i-z|$ 的最小值就是點 $(\sqrt{7},8)$ 到水平線 $y=-\frac{3}{2}$ 的距離 $8+\frac{3}{2}=\frac{19}{2}$



D. 三次停留區域標號數字、數字和及其對應機率如下：

| 第一次 | 第二次 | 第三次 | 標號數字和 | 機　率 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$ |
| 0 | 1 | 1 | 2 | $\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$ |
| 1 | 0 | 1 | 2 | $\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$ |
| 1 | 1 | 0 | 2 | $\frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$ |
| 1 | 1 | 1 | 3 | $(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$ |

令隨機變數 $X$ 表此遊戲指針三次所停留區域的標號數字之和，其機率函數列表如下：

| 標號數字和 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 機　率 | $\frac{3}{64}$ | $\frac{39}{64}$ | $\frac{21}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

所求隨機變數 $X$ 的期望值

$E(X)=0\cdot\frac{3}{64}+1\cdot\frac{39}{64}+2\cdot\frac{21}{64}+3\cdot\frac{1}{64}=\frac{84}{64}=\frac{21}{16}$

**第貳部分：非選擇題**

一、

1.因為圓外的點至此圓的兩切線段等長

所以 $\overline{BD}=\overline{BF}=x$，$\overline{CD}=\overline{BC}-\overline{BD}=4-x$

$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=5+4-x=9-x$

又 $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}=6+x$，所以 $9-x=6+x$，得 $x=\frac{3}{2}$

2.由 1. 知 $\overline{BD}=\frac{3}{2}$，$\overline{CD}=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，所以 $\overline{BD}$：$\overline{CD}=3:5$，

由分點公式得 $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$，而已知 $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 是不平行的兩非零向量，故得 $\alpha=\frac{5}{8}$、$\beta=\frac{3}{8}$

二、

1.因為三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 $a$

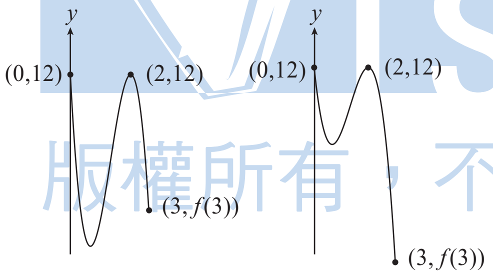
且 $0\le x\le 3$

$f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0$、$x=2$ 兩處

可知 $f'(2)=0$，且 $f(0)=f(2)=12$

圖形在 $(2,12)$ 處，以其為切點的切線是水平線，

所以 $y=f(x)$ 在 $0\le x\le 3$ 的範圍中可能的圖形如下：




所以 $a<0$

2.令 $h(x)=f(x)-12$，則 $h(0)=h(2)=0$，且 $h'(2)=f'(2)=0$

所以 $h(x)=f(x)-12=0$ 的實根為 0 及 2，且 2 為二重根

所以 $h(x)=ax(x-2)^2$，$f(x)=ax(x-2)^2+12$

因多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，且在 $x=1$ 處有相對極值

又對於任意實數 $s,r$（$s\le r$），$\int_s^r f(t)dt=G(r)-G(s)$ 恆成立

所以對於任意實數 $x$，$\int_0^x f(t)dt=G(x)-G(0)=G(x)$ 恆成立

由微積分基本定理知 $G'(x)=\frac{d\int_0^x f(t)dt}{dx}=f(x)$

由費瑪定理可知 $f(1)=G'(1)=0$，所以 $f(1)=a+12=0$，得 $a=-12$

3. $G'(x)=f(x)=-12x(x-2)^2+12=-12(x^3-4x^2+4x-1)$

$=-12(x-1)(x^2-3x+1)$

$=-12(x-1)(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2})$

列表顯示 $G'(x)$ 值的正、負及 $G(x)$ 的遞增、遞減如下：

| $x$ | 0 | | $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G'(x)$ | 12 | + | 0 | − | 0 | + | 12 |
| $G(x)$ | 0 | ↗ | $G(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ | ↘ | $G(1)$ | ↗ | $G(2)$ |

又 $G(1)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[-12(t^3-4t^2+4t-1)]dt$

$=(-3t^4+16t^3-24t^2+12t)\Big|_0^1=1$

所以在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 的最小值為 $G(0)=0$